

単弦カム曲線の解析

(第一報)

大八木 光 治*

Mathematical Analysis for the Sine Cam Curves. (1st Report)

By Koji Ohyagi*

Synopsis: The author had finished the trial making of a new machine-tool "Sine Cam Generator."

When used for turning and boring, the machine may be operated like an ordinary engine lathe i. e. the work is rotated and an infeed is given to the point cutter fixed on the cutting attachment that mounted and fixed on the cross slide.

When used for grinding, in place of the cutting attachment the grinding attachment is mounted and fixed on the cross slide.

However, the work may be finished in relatively short span of time.

This is a merit of the machine, and the another merit is that the sine cam curves adopted for the outside periphery may be obtained by a generating method, also the mathematical property of the sine cam curves is simple and clear.

The curve which is designated here as the sine cam curve may be represented in polar equation as $\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$, where r is the radius of the base circle, k is the amplitude of the cosine curve to be superposed on the base circle, n an integer representing the frequency of the cosine curve, and θ is the rotated angle of the radius vector ρ .

If the axis of θ is moved downwards, being parallel to itself by amount k the equation of curve become $y = K(1 - \cos \theta)$, (Fig. 1, & Fig. 2).

In Fig. 3, let a radius vector ρ be rotated anticlockwise around the center O of the circle, and its angle of rotation θ be measured from the ground line ox .

Let the length of ρ equal the radius of circle when $\theta = 0$.

If for each angle position from 0 to 2π , the radius vector is extended outwardly by ordinate y of the cosine curve of Fig. 2, the moving end point of the radius vector will describe a curve as represented by the thick line in Fig. 3, of which the equation become $\rho = r + K(1 - \cos \theta)$.

If, in above figuration, the frequency of the cosine curves of Fig. 2, is doubled or tripled, the curves of Fig. 4 or Fig. 5 will be generated.

Generally, the n -cycles-cam curve to be represented by the equation $\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$ may be readily determined if three constants r , K and n determined.

Therefore the mathematical analysis of the curves is easy, as well as the machining and measurement of the workpieces.

Moreover the standardization will be easy.

This paper intend to describe the mathematical analysis and numerical calculation for the purpose of using the sine cam curves.

要旨: 筆者は新型創成工作機械を試作完成して、サインカムゼネレータ²⁾と名づけた。これは旋削、ボーリング加工等は普通の旋盤と同様の操作で加工ができる。すなわちワークが回転し、往復台上に取り付けた切削アタッチメントに固定したバイトに送りをかけて切削する。研削加工は、切削アタッチメント⁴⁾⁶⁾⁷⁾と研削アタッチメント⁵⁾⁶⁾⁷⁾を取りかえて研削するようにしてある。作業時間が比較的に短いことが特長であり、またワーク外周には創成法によって単弦カム曲線が加工できることがもう一つの特長でもある。創成される単弦カム曲線の数学的性質は簡単明瞭であり、極方程式 $\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$ ²⁾ で表わされる。 r は基

* 機械工学科 教授

Professor, Mechanical Engineering Division.

円半径, K は基円半径上に加算する余弦波の振幅, 整数 n は, 余弦波の周期, θ は動径 ρ の回転角である。図について説明すると,

単弦カムワークとは軸直角断面プロファイルが図3～図7の形状をもつワークのことをいう。図1は, $y = -K \cos \theta$ である。横軸を $-K$ だけ平行移動すると図2のように, $y = K(1 - \cos \theta)$ となる。図3は動径 ρ の回転角 θ と図2の θ を1:1の対応で y の値を基円半径 r に加算したもので, 極方程式 $\rho = r + K(1 - \cos \theta)$ で表わされる。図4は θ の対応を1:2としたもので $\rho = r + K(1 - \cos 2\theta)$ である。 ρ の回転角と図2の θ の対応を1: n とすると, $\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$ となり, この曲線を n サイクル単弦カム曲線とよぶことにする。この曲線は平易な数学的性質を持つから機械の締結部品⁸⁾, ポンプのロータ¹⁾, カムリング等に使すると, 規格が定め易く性能もすぐれている。図5, 6, 7 は加算周期がそれぞれ3, 4, 6—サイクル単弦カム曲線である。

本文はこれら曲線群の数学上の解析と機械工学に適用する場合の計算方法を主眼として記述したものである。

はじめに

サインカムゼネレータ¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾の実用化試験に当たり, 仕様決定ならびに加工領域に伴う機械各部の寸法の算定と, サインカムワークを使用した回転ポンプ⁶⁾の吐出量ならびに各部作動領域の算定とは, ケースバイケースに数値解析を実施したのであるが実験の進展につれてこれらは関連性がある同一の数式でも種々の用途のあることが判明した。本文はこれらの観点から解析結果を整理するとともにノーハウの関係から未発表であった数式の誘導を加えてその内容を二大別し, 今回はその前半を第一報とし便宜上 八章に分けて記述する。

本文の数値解析は平易な初等数学の問題の集積に他ならないが項目間に関連性があるので説明に順逆の点もある。たとえば5章の内容は, 1章および2章の結果から演繹した算定方法の一例である。このような関連性は数多くあるので詳細に説明することを省略する。

発表形式を統一することは困難であることをおことわりする次第である。

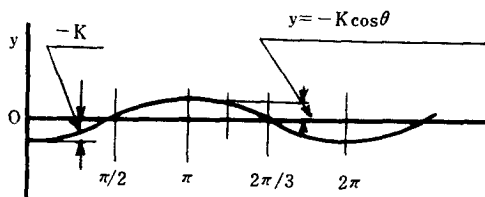


図1

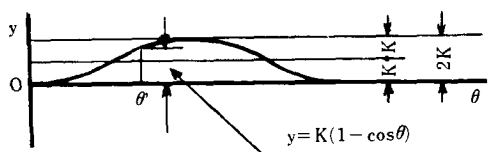


図2

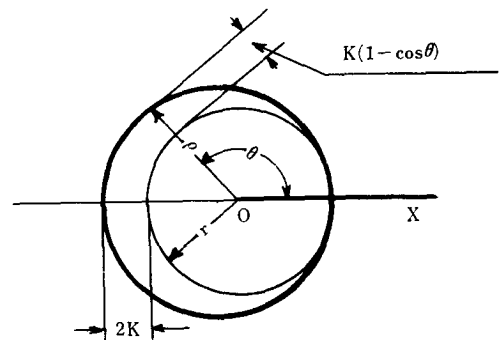


図3

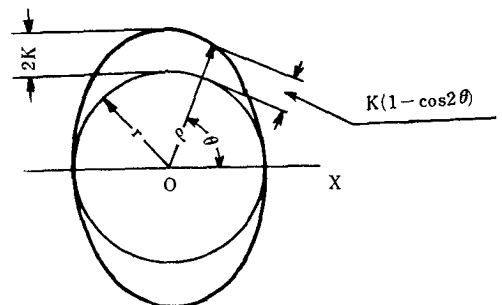


図4

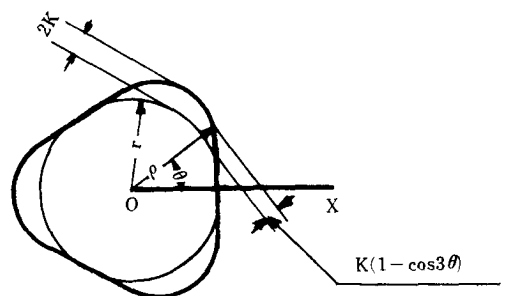


図5

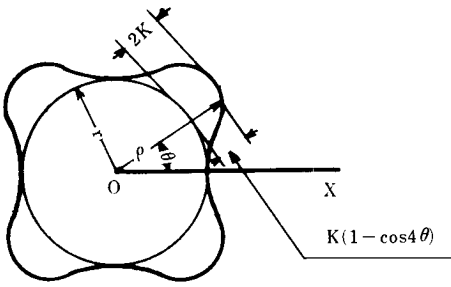


図 6

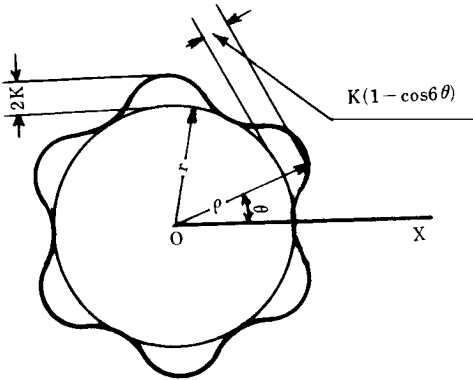


図 7

1. n サイクル単弦カム曲線の接線角の極値

図 8 は 2 サイクル単弦カム曲線で、 θ に対応する動径 ρ とその接線 $T-T'$ とのなす接線角を φ とすると、

$$\rho = r + K(1 - \cos 2\theta)$$

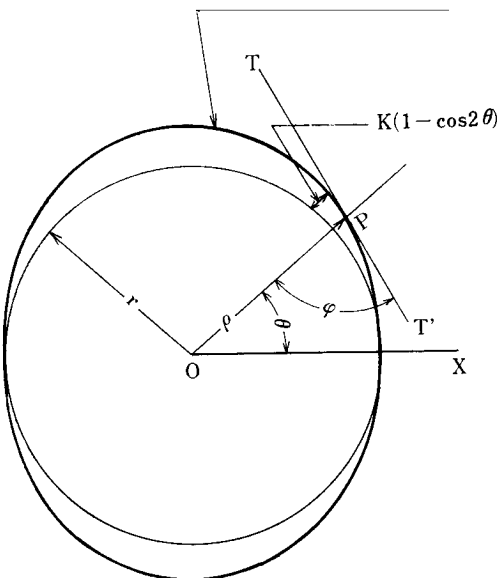


図 8

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\rho}{\rho'} = \tan^{-1} \frac{r + K(1 - \cos 2\theta)}{2K \sin 2\theta} \quad (1)$$

$r:K=C$ とおくと、一般に n サイクル曲線では、

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{C+1-\cos n\theta}{n \sin n\theta} \quad (2)$$

式 (2) は r, K を含まないから、 $r:K$ の一定な曲線群は相似である。したがって C を相似定数とよぶことにする。

φ の極値を求めると式 (2) から

$$\varphi' = \frac{n^2 \sin^2 n\theta - (C+1-\cos n\theta) n^2 \cos n\theta}{n^2 \sin^2 n\theta + (C+1-\cos n\theta)^2}$$

$n^2 \sin^2 n\theta - (C+1-\cos n\theta) n^2 \cos n\theta = 0$ とおくと $\cos n\theta = 1/(C+1)$

$$\theta = \frac{1}{n} \cos^{-1} \frac{1}{C+1} \quad (3)$$

式 (3) の θ は接線角に極値を与える回転角であるから、これを式 (2) に代入すると、

$$\varphi_{\min} = \tan^{-1} \frac{C+1-\frac{1}{C+1}}{n \sin \cos^{-1} \frac{1}{C+1}} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{C^2+2C}}{n} \quad (4)$$

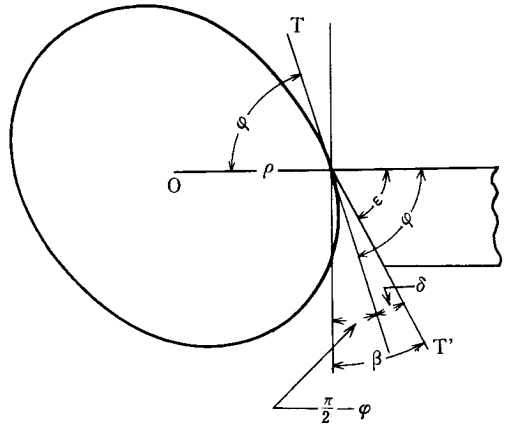


図 9

式 (4) は図 9 のようにワークプロフィールを切削する場合にバイトの前逃げ角 β の算定に使用する。図 9 のように、 $\beta > \pi/2 - \varphi_{\min}$ を満足するように刃物角 ϵ を研削しておく必要がある。すなわち実際の逃げ角 δ を必要とする。その他ペーン型油圧ポンプのロータプロフィールに、またはカムリング内周プロフィールに上記曲線を使用するとき後述のようにペーンの圧力角の算定に使用する。

2. 単弦カム曲線、 $\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$ の曲率半径

単弦カム曲線の動径 ρ の回転角が θ のとき ρ と曲線

の交点, すなわち ρ の先端における曲率半径を $[\rho_C]_0$ とすると,

$$[\rho_C]_0 = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho\rho'' - \rho''^2} \\ = \frac{\sqrt{\{r^2 + 2rK(1 - \cos n\theta) + K^2(1 - \cos n\theta)^2\}}}{r^2 + 2rk(1 - \cos n\theta) + K^2(1 - \cos n\theta)^2 + 2n^2K^2} \\ \frac{+ n^2K^2 \sin^2 n\theta}{\sin^2 n\theta - n^2K \cos n\theta \{r + K(1 - \cos n\theta)\}}$$

回転角 θ が $0, \pi/2n, \pi/n, [\text{rad}]$ に対応する曲率半径をそれぞれ $[\rho_C]_0, [\rho_C]_{\pi/2n}, [\rho_C]_{\pi/n}$ とすると

上式で $\theta=0$, とおくと

$$[\rho_C]_0 = \frac{r^3}{r^2 - n^2Kr} = \frac{C}{C - n^2} \cdot r \quad (5)$$

式 (5) は, 曲線の最小径と曲線との交点における曲線の曲率半径を示している。また $\theta=0$ なるときは式 (2) から

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{C}{0} = \tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2} [\text{rad}]$$

曲率中心は, 動径 ρ_0 上にあって, ρ_0 と $[\rho_C]_0$ は重なる。

$\theta = \pi/n$ とおくと,

$$[\rho_C]_{\pi/n} = \frac{(r+2K)^2}{(r+2K)\{r+(n^2+2)K\}} = \frac{(C+2)^2}{C(C+n^2+2)} \cdot r \quad (6)$$

式 (6) は, 曲線の最大径と曲線との交点における曲率半径を示している。また $\theta = \pi/n$ のときは, 式 (2) から,

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{C}{0} = \tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2} [\text{rad}]$$

曲率中心は動径 $\rho_{\pi/n}$ 上にあって, $\rho_{\pi/n}$ と $[\rho_C]_{\pi/n}$ は重なる。 $\theta = \pi/2n$ とおくと,

$$[\rho_C]_{\pi/2n} = \frac{\{(r+K)^2 + n^2K^2\}^{3/2}}{(r+K)^2 + 2n^2K^2} = \frac{\{(C+1)^2 + n^2\}^{3/2}}{C\{(C+1)^2 + 2n^2\}} \cdot r \quad (7)$$

式 (7) は, 曲線とピッチ円との交点における曲線の曲率半径を示している。また $\theta = \pi/2n$ のときは式 (2) から

$$\varphi_{(\pi/2n)} = \tan^{-1} \frac{C+1}{n} = \tan^{-1} \frac{r+K}{nK} \quad (8)$$

曲率中心は動径 $\rho_{\pi/2n}$ と $\pi/2 - \varphi_{(\pi/2n)}$ $[\text{rad}]$ の角度をなす法線上にある。

3. 単弦カム曲線, $\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$, の変曲点

$\rho^2 + 2\rho\rho'' - \rho\rho''^2 = 0$, のとき変曲点をもつから

$\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$, $\rho' = nK \sin n\theta$, $\rho'' = n^2K \cos n\theta$, を代入して

$$(r+K)^2 - 2K(r+K) \cos n\theta + K^2 \cos^2 n\theta \\ + 2n^2K^2 \sin^2 n\theta - n^2K(r+K) \cos n\theta \\ + n^2K^2 \cos^2 n\theta = 0 \\ (n^2-1)K^2 \cos^2 n\theta + (n^2+2)K(r+K) \cos n\theta \\ - \{(2n^2+1)K^2 + 2Kr + r^2\} = 0 \quad (9)$$

$$A = (n^2-1)K^2,$$

$$B = (n^2+2)K(r+K),$$

$$C = -\{(2n^2+1)K^2 + 2Kr + r^2\}, \text{ とおくと式 (9) は}$$

$$A \cos^2 n\theta + B \cos n\theta + C = 0$$

$$\cos n\theta = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$-1 \leq \cos n\theta \leq 1$ なるにより

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \leq 1, \therefore \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \leq 2A + B$$

$B^2 - 4AC \geq 4A^2 + 4AB + B^2$, これより式 (9) が成立するためには, $A+B+C \geq 0$

$$\therefore (n^2-1)K^2 + (n^2+2)K(r+K) \\ - \{(2n^2+1)K^2 + 2Kr + r^2\} \geq 0$$

$$n^2Kr - r^2 \geq 0$$

$$\therefore n^2 \geq \frac{r}{K}, \text{ 又は } n^2 \geq C, \text{ なるを要する。つぎに,}$$

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \geq -1 \text{ が成立するためには,}$$

$A-B+C \leq 0$ なるを要する。

$$\therefore (n^2-1)K^2 - (n^2+2)K(r+K) \\ - \{(2n^2+1)K^2 + 2Kr + r^2\} \\ = -(r+2K)(2K+r+n^2K) \leq 0$$

であるから, $A-B+C \leq 0$ は成立する。したがって, 閉曲線 $\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$ が変曲点をもつ条件は, $n^2 \geq C$ である。

r と K の間につきの関係があるとき変曲点をもつ

$$n=1 \text{ のとき } 1 \geq r/K, \therefore r \leq K$$

$$n=2 \text{ のとき } 4 \geq r/K, \therefore r \leq 4K \quad (\text{図10})$$

$$n=3 \text{ のとき } 9 \geq r/K, \therefore r \leq 9K \quad (\text{図11})$$

$$n=4 \text{ のとき } 16 \geq r/K, \therefore r \leq 16K \quad (\text{図12})$$

$$n=6 \text{ のとき } 36 \geq r/K, \therefore r \leq 36K \quad (\text{図13})$$

なお式 (5) から判別し得るように

$$[\rho_C]_0 = \frac{C}{C-n^2} \cdot r \text{ において } n^2 = C \text{ なるときは } [\rho_C]_0$$

$= \infty$ となり, 曲線は始線をとる点で直線となる。すなわち単弦カム曲線では, $C > n^2, r > n^2K$, なる範囲では変曲点がなく中心に対しすべて凹である。

$C \leq n^2, r \leq n^2K$, なる範囲では変曲点をもち曲率中心は曲線に関して中心と反対側に位置する。

以上の計算から式 (5), (6), (7) では r の係数は相対定数 C とサイクル数 n とから成立する。したがってこれらを, それぞれの対応点の曲率半径係数とよぶこととする。

$$n=2 \quad n^2=4 \quad c=\frac{r}{K}$$

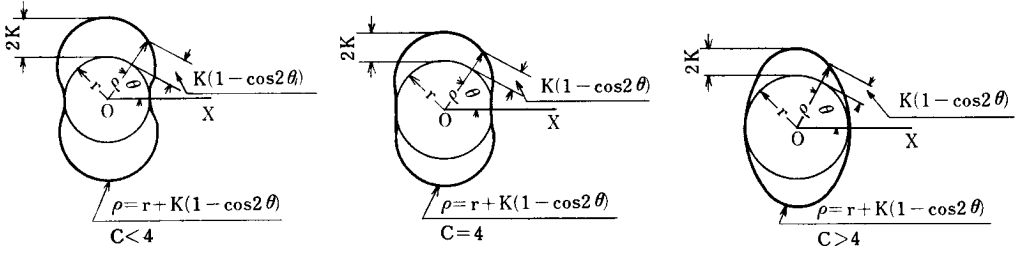


図 10

$$n=3 \quad n^2=9 \quad c=\frac{r}{K}$$

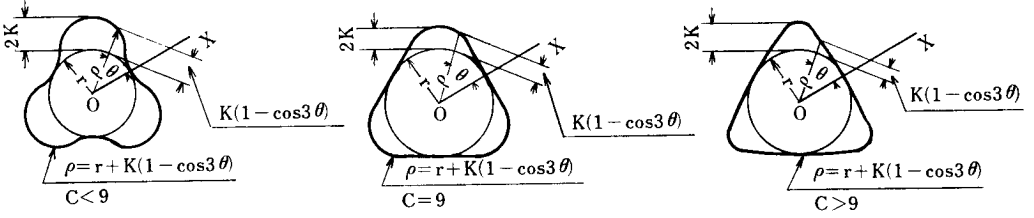


図 11

$$n=4 \quad n^2=16 \quad c=\frac{r}{K}$$

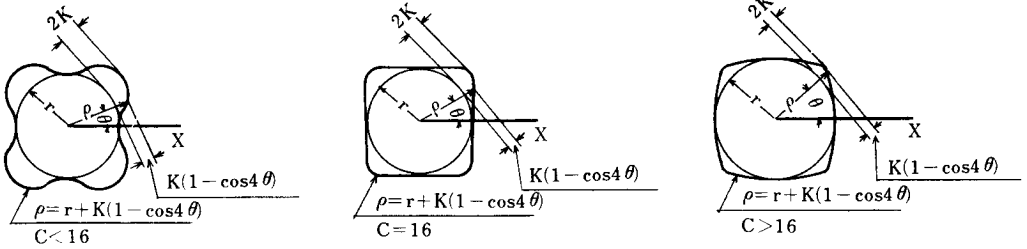


図 12

$$n=6 \quad n^2=36 \quad c=\frac{r}{K}$$

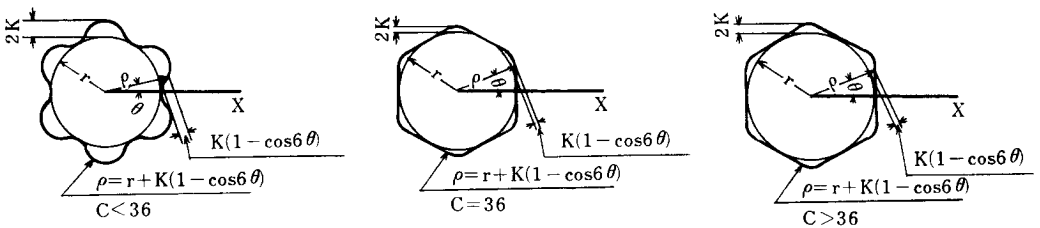


図 13

図10, 11, 12, 13の曲線群で, $n^2=C$ のときを基準として表1には最小接線角 φ_{\min} , 表2に曲率半径係数, 表3に, 基円と曲線の接点における接線角 φ , ピッチ円と曲線の交点 ($\theta=\pi/2n$), における接線角, 外接円と曲線の接点 ($\theta=\pi/n$), における接線角を例示した。

表 1

n	1	2	3	4	5	6
$C=n^2$	1	4	9	16	25	36
θ_{\min}	60°	39°15'	28°5'	21°40'	17°34'	14°43'
$\tan \varphi_{\min}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{38}$
φ_{\min}	60°	67°54'	73°15'	76°45'	79°6'	80°43'
$\frac{2}{\pi} - \varphi_{\min}$	30°	22°6'	16°45'	13°15'	10°54'	9°17'

表 2

n	曲率半径係数				
	2	3	4	5	6
C	4	9	16	25	36
$\theta=0$	∞	∞	∞	∞	∞
$\theta=\frac{\pi}{2n}$	1.183	1.072	1.037	1.022	1.015
$\theta=\frac{\pi}{n}$	0.900	0.672	0.596	0.561	0.542

表 3

φ		φ	φ	φ	φ
n	2	3	4	5	6
C	4	9	16	35	36
$\theta=0$	90°	90°	90°	90°	90°
$\theta=\frac{\pi}{2n}$	$\tan^{-1} 2.5$ 68°12'	$\tan^{-1} 3.33$ 73°18'	$\tan^{-1} 4.25$ 76°45'	$\tan^{-1} 5.2$ 79°7'	$\tan^{-1} 6.16$ 80°47'
$\theta=\frac{\pi}{n}$	90°	90°	90°	90°	90°

4. 曲線の記号と略画法

単弦カム曲線プロフィールをもつワークを設計し, 工作するには, 記号と略画法が必要となるから, 記号法をつぎのように定める。単弦カム曲線は, $f(r, K, n, \theta)$ であるからその最大径 D_0 , 基円直径 D_r , ピッチ円直径 D_p , サイクル数 n , を指定すればよい。一例をあげると $4N60D_02K$, とし, 4はサイクル数, 60は $D_0=2(r+2K)$

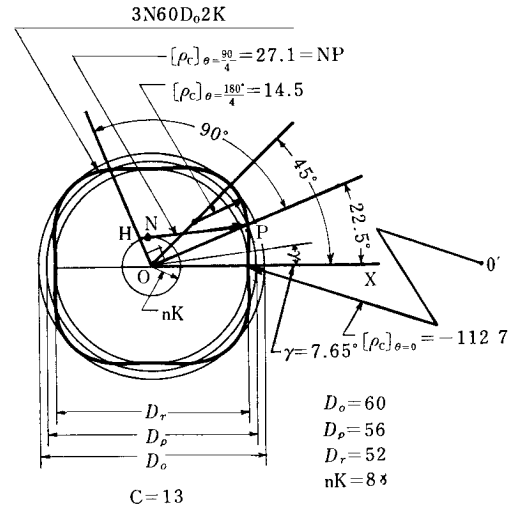


図 14

でプロフィールの外接円の直径, $2K$ の2は加算正弦波の振幅を, 単位 [mm] で表わすものとする。

図13にこの記号によるプロフィールを作図する画法を説明する。原線 OX を定め, O を中心として, $2nK=16$ [mm], $D_r=52$ [mm], $D_p=56$ [mm], $D_0=60$ [mm] を直径とする同心円を描く, つぎに OX から $\pi/2n$ [rad] $=22.5^\circ$, ごとに放射線を引き各円周を $4n$ 等分 (16等分) する。一番目の放射線とピッチ円との交点を P_1 とし一つおきの放射線とピッチ円との交点をそれぞれ P_3, P_5, P_7, P_9 , とすると $2n$ 個すなわち, 8 個のピッチ点を得る。

OP_1 と直角をなす OP_3 と直径 $2nK$ の小円との交点を H とする。 P_1H は P_1 点をとる単弦カム曲線の法線となる。理由は式 (8) で, $r+K=OP_1$, $nK=OH$, であるから, $\varphi_{\pi/2n}=\tan^{-1}OP_1/OH$, $\varphi_{\pi/2n}=\angle P_1OH$ となるから算出しなくて作図で法線が求められる。つぎに式(7)から $[\rho_c]_{22.5^\circ}=27.08$ [mm] を求めて P_1H 上に $P_1N_1=[\rho_c]_{22.5^\circ}$ として N_1 を取る。他のピッチ点の曲率中心も同様に求める。

曲線の最小動径の曲率中心の一つは首線上にある。式 (5) から $[\rho_c]_0=-112.67$ [mm], 負号を持っているから曲率中心は曲線に関して極0と反対側にあり, $r=26$, $K=2$, $C=13$, $n^2=16$, $n^2>C$, ゆえに変曲点を持っている。したがって首線と基円との交点から 112.67 [mm] の点に位置する。他の最小動径の曲率中心は4個あって対称に位置する。

最大動径の曲率中心は P 点に関して最小動径と対称な放射線上にある。式 (6) から $[\rho_c]_{45^\circ}=14.52$ [mm] を算出し外接円と放射線との交点から 14.5 [mm] の位

置に曲率中心が求められる。このようにして求めた曲率中心を中心として円弧で結び合わせると所要の略画が描かれる。

変曲点をもつ場合に精密に作図するには、式 (9) から

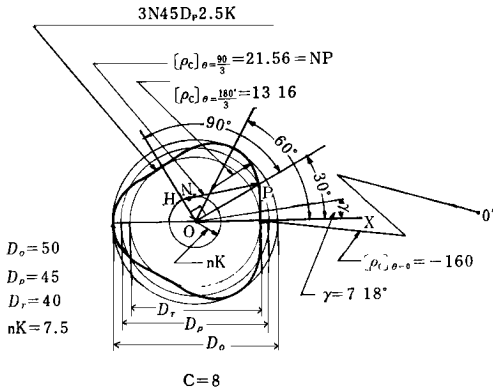


図 15

$$\cos n\theta =$$

$$\frac{-(n^2+2)(C+1)K^2 \pm nK^2 \sqrt{(n^2+8)(C+1)^2+8(n^2-1)}}{2(n^2-1)K^2}$$

$$\therefore \theta =$$

$$\frac{1}{n} \cos^{-1} \frac{-(n^2+2)(C+1) \pm n \sqrt{(n^2+8)(C+1)^2+8(n^2-1)}}{2(n^2-1)}$$

この回転角 θ をもつ動径上に変曲点があり n と C のみの函数であるから相似形の変曲点は同一動径上にある。

この θ を γ とおく。図14では、 $n=4, C=13$ を代入して、 $\gamma \doteq 7.65^\circ$ 、図15、では $n=3, C=8, \gamma=7.18^\circ$ を得る。首線と γ をなす角度で $[\rho_c]_0, [\rho_c]_{x/2n}$ の円弧を結合する。変曲点はピッチ点より首線に近づいている。これは後述の式 (21) の特性を示している。

5. 単弦カムの圧力角の算定

単弦カムプロフィールをもつワークを工作するにあたりその圧力角を指定すると、円形工具の直径は制限を受ける。ワークプロフィールの圧力角 17° 、4 サイクルの場合を一例として、算定する。式 (4) から、

表 4 $N=2 \quad C=8$

γ	K	$2K$	D_r	D_p	D_o	$[P_c]\theta$			I_p	I_y	I_z	S
			$2r$	$2r+2K$	$2r+4K$	$\theta=0$	$\theta=45^\circ$	$\theta=90^\circ$				
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ²
4.0	0.5	1.0	8.0	9.0	10	8.0	4.40	3.57	0.067	0.027	0.040	0.640
4.8	0.6	1.2	9.6	10.8	12	9.6	5.28	4.29	0.139	0.056	0.084	0.922
5.6	0.7	1.4	11.2	12.6	14	11.2	6.16	5.00	0.257	0.104	0.156	1.255
6.4	0.8	1.6	12.8	14.4	16	12.8	7.04	5.71	0.438	0.177	0.266	1.639
7.2	0.9	1.8	14.4	16.2	18	14.4	7.92	6.43	0.701	0.284	0.426	2.074
8.0	1.0	2.0	16.0	18.0	20	16.0	8.81	7.14	1.069	0.433	0.650	2.560
9.6	1.2	2.4	19.2	21.6	24	19.2	10.57	8.57	2.216	0.898	1.348	3.687
11.2	1.4	2.8	22.4	25.2	28	22.4	12.33	10.00	4.106	1.664	2.497	5.018
12.8	1.6	3.2	25.6	28.8	32	25.6	14.09	11.43	7.005	2.839	4.260	6.555
14.4	1.8	3.6	28.8	32.4	36	28.8	15.85	12.86	11.220	4.548	6.823	8.296
16.0	2.0	4.0	32.0	36.0	40	32.0	17.61	14.29	17.101	6.931	10.400	10.242
18.4	2.3	4.6	36.8	41.4	46	36.8	20.25	16.46	29.910	12.123	18.189	13.544
20.8	2.6	5.2	41.6	46.8	52	41.6	22.89	18.57	48.843	19.796	29.703	17.308
23.2	2.9	5.8	46.4	52.2	58	46.4	25.54	20.71	75.596	30.639	45.972	21.533
25.6	3.2	6.4	51.2	57.6	64	51.2	28.18	22.86	112.075	45.424	68.156	26.218
28.0	3.5	7.0	56.0	63.0	70	56.0	30.82	25.00	160.391	65.007	97.539	31.365
30.4	3.8	7.6	60.8	68.4	76	60.8	33.46	27.14	222.866	90.327	153.531	36.972
32.8	4.1	8.2	65.6	73.8	82	65.6	36.74	29.29	302.602	122.411	183.621	43.040
35.2	4.4	8.8	70.4	79.2	88	70.4	38.74	31.43	400.608	162.366	243.621	49.569
37.6	4.7	9.4	75.2	84.6	94	75.2	41.38	33.57	521.555	211.386	317.172	56.559
40.0	5.0	10.0	80.0	90.0	100	80.0	44.26	35.71	668.019	27.0748	406.241	64.010

$$\varphi_{\min} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{C^2 + 2C}}{4} = 90^\circ - 17^\circ = 73^\circ \text{ (所要接線角)}$$

$$\tan 73^\circ \doteq 3.271$$

$$\therefore C^2 + 2C - 16 \times 3.271^2 = 0$$

$$C = -1 \pm \sqrt{172}$$

$$C = 12.11$$

$$[\rho_C]_0 = \frac{12.11}{12.11 - 16} \cdot r \doteq -3.12 \cdot r \text{ (変曲点あり)}$$

円形工具半径を R_t とすると $R_t < 3.12 \cdot r$

$R_t = 0.8 \times 3.12 \cdot r \doteq 2.5r$, にすることが必要である。

ペーン型ポンプのペーンの摺動する部分のプロフィール曲線に単弦カム曲線を使用するときに、圧力角を定めてプロフィールを加工するとき、切り下げを防止する目的で円形工具の半径を撰定するときに必要な算法である。また単弦カム創成加工機の研削アタッチメントの基本設計の際に加工し得るワークの形状範囲を決定するにも必要となる。

6. 単弦カム断面の2次モーメント, 極モーメント

閉曲線 $\rho = r + K(1 - \cos n\theta)$, $[n \geq 2]$ をプロフィールとする断面の $\theta = 0$, の方向を Z 軸, $\theta = \pi/2$ の方向を y 軸, とするとき, I_P, I_Z, I_y を求める。

これは単弦カムプロフィールを軸直角断面にもつワークの強度計算に用い, 式が簡単になるので実用性がある。

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \quad (10)$$

$$I_Z = \int_A y^2 dA \quad (11)$$

$$I_y = \int_A Z^2 dA \quad (12)$$

$$\begin{aligned} I_P &= \int_A \rho^2 dA = 2 \int_0^{\pi/n} d\theta \int_0^{f(\theta)} \rho^3 d\rho \\ &= 2n \int_0^{\pi/n} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{f(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

但し, $f(\theta) = r + K(1 - \cos n\theta)$

$$I_P = \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \{f(\theta)\}^4 d\theta \quad (13)$$

ピッチ円半径は $r + K$ であるから, $r + K = P$ とおく

$$f(\theta) = P - K \cos n\theta$$

$$\{f(\theta)\}^4 = (P - K \cos n\theta)^4$$

$$\begin{aligned} &= P^4 - 4P^3K \cos n\theta + 6P^2K^2 \cos^2 n\theta \\ &\quad - 4PK^3 \cos^3 n\theta + K^4 \cos^4 n\theta, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/n} \{f(\theta)\}^4 d\theta = P^4 [\theta]_0^{\pi/n}$$

$$- 4P^3K \left[\frac{1}{n} \sin n\theta \right]_0^{\pi/n}$$

$$+ 6P^2K^2 \left[\frac{1}{2n} (n\theta + \frac{1}{2} \sin 2n\theta) \right]_0^{\pi/n}$$

$$- 4PK^3 \left[\frac{1}{3n} \sin n\theta + \cos^3 n\theta \right]_0^{\pi/n}$$

$$+ K^4 \left[\frac{1}{4n} \left(\frac{3}{2} n\theta + \sin 2n\theta + \frac{1}{8} \sin 4n\theta \right) \right]_0^{\pi/n}$$

$$= P^4 \times \frac{\pi}{n} + 6P^2K^2 \times \frac{\pi}{2n} + K^4 \times \frac{3\pi}{8n}$$

式 (13) より

$$I_P = \frac{n}{2} \left(\frac{\pi}{n} P^4 + \frac{3\pi}{n} P^2K^2 + \frac{3\pi}{8n} K^4 \right)$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} P^4 + \frac{3}{2} P^2K^2 + \frac{3}{16} K^4 \right)$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2} (r+K)^4 + \frac{3}{2} K^2 (r+K)^2 + \frac{3}{16} K^4 \right\}$$

$r = CK$ とおくと

$$I_P = \pi \left(\frac{r^4}{2} + 2r^3K + \frac{9}{2} r^2K^2 + 5rK^3 + \frac{35}{16} K^4 \right)$$

$$= \pi r^4 \left(\frac{1}{2} + 2 \frac{1}{C} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{C^2} + 5 \frac{1}{C^3} + \frac{35}{16} \frac{1}{C^4} \right) \quad (14)$$

式 (14) は n を含まないから I_P の値は C と r で定まる。但し $n \geq 2$ であり $n=1$ の場合は使用できない。

つぎに I_Z を求める。 $n \geq 3$, の場合は, $I_Z = I_y$ である。

$$\therefore I_P = I_Z + I_y \quad I_P = 2I_Z,$$

$$I_Z = I_y = 1/2 I_P \quad (15)$$

式 (14) で I_P を求め式 (15) から I_y, I_Z をもとめる。

$n=2$ の場合は, $I_Z \doteq I_y$

$$\text{式 (11) により } I_Z = \int_A y^2 dA$$

$$= \int_A \rho^2 \sin^2 \theta dA$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{f(\theta)} \rho^3 d\rho$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{f(\theta)} \times \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \{f(\theta)\}^4 \sin^2 \theta d\theta$$

ここに

$$f(\theta) = r + K(1 - \cos 2\theta) = r + 2K \sin^2 \theta \quad (16)$$

$$\{f(\theta)\}^4 \sin^2 \theta = (r + 2K \sin^2 \theta)^4 \sin^2 \theta$$

$$= r^4 \sin^2 \theta + 8r^3K \sin^4 \theta + 24r^2K^2 \sin^6 \theta$$

$$+ 32rK^3 \sin^8 \theta + 16K^4 \sin^{10} \theta$$

$$\therefore I_Z = r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta + 8r^3K \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta$$

$$+ 24r^2K^2 \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta + 32rK^3 \int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta$$

$$+ 16K^4 \int_0^{\pi/2} \sin^{10} \theta d\theta$$

一般に,

$$F_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m \theta d\theta = \left[\frac{-\sin^{m-1} \theta \cos \theta}{m} \right]_0^{\pi/2}$$

$$+ \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \theta d\theta$$

$$\therefore F_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \left[\frac{-\sin \theta \cos \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$F_4 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \left[\frac{-\sin^3 \theta \cos \theta}{4} \right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{4} F_2 = \frac{3}{16} \pi$$

$$F_6 = \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta = \left[\frac{-\sin^5 \theta \cos \theta}{6} \right]_0^{\pi/2} = \frac{5}{6} F_4 = \frac{5}{32} \pi$$

$$F_8 = \int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta = \left[\frac{-\sin^7 \theta \cos \theta}{8} \right]_0^{\pi/2} + \frac{7}{8} F_6 = \frac{35}{256} \pi$$

$$F_{10} = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} \theta d\theta = \left[\frac{-\sin^9 \theta \cos \theta}{10} \right]_0^{\pi/2} + \frac{9}{10} F_8 = \frac{63}{512} \pi$$

$F_2 \sim F_{10}$ の値を I_x 式に代入し, $K=r/C$ により

$$I_x = \left(\frac{1}{4} r^4 + \frac{3}{2} r^3 K + \frac{15}{4} r^2 K^2 + \frac{35}{8} r K^3 + \frac{63}{32} K^4 \right) \pi \quad (17)$$

$$= \pi r^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{C} + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{C^2} + \frac{35}{8} \cdot \frac{1}{C^3} + \frac{63}{32} \cdot \frac{1}{C^4} \right) \quad (18)$$

つぎに I_y , を計算する。

$$I_y = \int_A Z^2 dA = \int_A \rho^2 \cos^2 \theta dA = \int_A (\rho_{\pi/2})^2 \sin^2 \theta dA$$

$$\text{上式で } \rho_{\pi/2} = r + K \left\{ 1 - \cos 2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

$$= r + K + K \cos 2\theta$$

$$= r + 2K - K(1 - \cos 2\theta)$$

$$R_0 = r + 2K \quad \text{とおくと}$$

$$\rho_{\pi/2} = R_0 - K(1 - \cos 2\theta) = R_0 - 2K \sin^2 \theta$$

$\rho_{\pi/2}$ は ρ 式の座標軸を 90° 回転したことになるから I_y , の積分値は式 (16) の r の代りに R_0 , K の代りに $-K$, とおけばよい。したがって式 (17) から

$$\begin{aligned} I_y &= \left(\frac{1}{4} R_0^4 - \frac{3}{2} R_0^3 K + \frac{15}{4} R_0^2 K^2 - \frac{35}{8} R_0 K^3 + \frac{63}{32} K^4 \right) \pi \\ &= \left(\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^3 K + \frac{3}{4} r^2 K^2 + \frac{5}{8} r K^3 + \frac{7}{32} K^4 \right) \pi \\ &= \pi r^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{C^2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{C^3} + \frac{7}{32} \cdot \frac{1}{C^4} \right) \quad (20) \end{aligned}$$

$I_x + I_y = I_P$ により式 (18), (20) から I_P を求めるとその値は, 式 (14) の右辺に等しい。

W_P , を極断面係数とし, 外接円の直径を D_r とすると,

$$W_P = 2I_P / D_r = I_P / (r + 2K)$$

以上の諸式と断面積 S の式から, 軸直角断面プロファイルに単弦カム曲線を採用した軸の強度を算定する。

7. 単弦カム曲線の包む面積 S

図16にて首線 OX と ρ_θ の間の面積を S_θ とする。

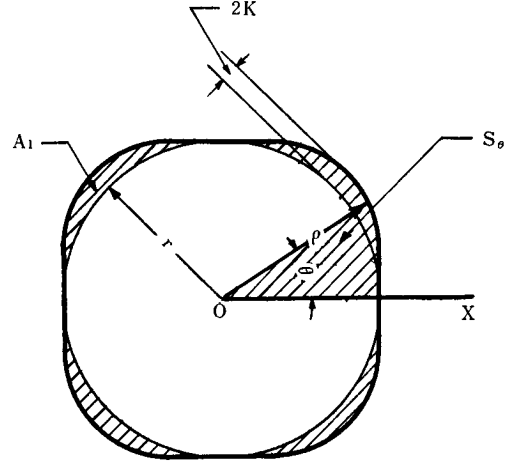


図 16

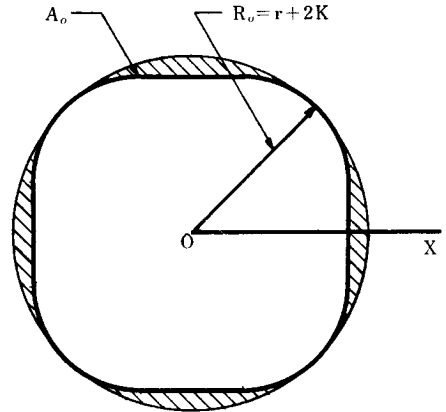


図 17

$$\begin{aligned} S_\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \{ r + K(1 - \cos n\theta) \}^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[(r + K)^2 \theta - \frac{2K(r + K)}{n} \sin n\theta + \frac{K^2}{2} \theta + \frac{K^2}{4n} \sin 2n\theta \right] \end{aligned}$$

S は曲線の包む面積とすると, $\theta = 2\pi$, を上式に入れて

$$S = \left\{ (r+K)^2 + \frac{K^2}{2} \right\} \pi$$

$$= \left(1 + \frac{2}{C} + \frac{1.5}{C^2} \right) \pi r^2 \quad (21)$$

式 (21) は n を含まないから、 C と r 、すなわち、基円半径 r と加算正弦波の振幅 K を等しくする n サイクル単弦カム曲線の面積は n に関係なく等しい。 r と C が等しいとき、軸の垂直応力 σ は n に関係なく等しい。つぎに単弦カム曲線の外接円の半径を図 17, のように R_0 とおく

$$R_0 = r + 2K = (C+2)K$$

$$\therefore K = \frac{R_0}{C+2} \quad \therefore r = CK = \frac{C}{C+2} \cdot R_0$$

式 (21) に代入して

$$S = \frac{(C^2 + 2C + 1.5)}{(C+2)^2} \cdot \pi R_0^2$$

単弦カム曲線とその外接円で囲まれた面積を A_0 とすると、

$$A_0 = \pi R_0^2 - \frac{(C^2 + 2C + 1.5)}{(C+2)^2} \cdot \pi R_0^2 = \frac{(2C + 2.5)}{(C+2)^2} \cdot \pi R_0^2 \quad (22)$$

基円と単弦カム曲線で囲まれた面積を A_i 、とすると、式 (21) から

$$A_i = \left(\frac{2}{C} + \frac{1.5}{C^2} \right) \pi r^2 \quad (23)$$

図 17 の斜線部分は A_0 を、図 16 は A_i 、である。

式 (21) は前項の断面二次モーメントならびに断面二次極モーメントの算定とともに強度計算が容易になる利点がある。式 (22), (23) は機械工作に際して切削代金の算定に便利である。さらに単弦カム曲線を容積型ポンプのカムリングまたはロータプロフィールに使用すると次項に説明するようにポンプ吐出量の脈動を完全になくす利点がある。

8. 平衡ベーン型ポンプの吐出量

図 18, のバランスド、ベーン型ポンプでロータ外周に 2 サイクル単弦カム曲線を採用し軸 S で矢印の方向に回転する。円筒ケーシング内に半径方向に 6 個のベーン放射方向に $\pi/3$ ラジアン の角度で設け、ケーシングに設けたベーン案内溝に放射方向に摺動しその一端はロータに接触して 6 個の作動室 $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ を形成する。ロータプロフィールの首線を OX とする。

ケーシングの内径を R 、巾を l とすると、

$$V_1 \text{ の容積} = [V_0]_{\theta+\pi/3}^{\theta+\pi/3} = l \left[\frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\theta+\pi/3} \{r + K(1 - \cos 2\theta)\}^2 d\theta \right]$$

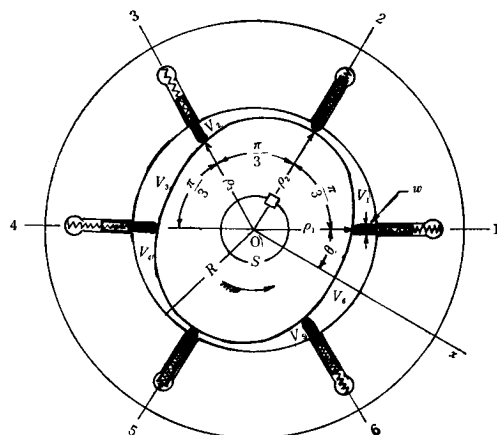


図 18

$$= \frac{\pi R^2 l}{6} - \frac{l}{2} [(r+K)^2 \theta]_{\theta}^{\theta+\pi/3} + lK(r+K) \int_{\theta}^{\theta+\pi/3} \cos 2\theta d\theta - \frac{lK^2}{2} \int_{\theta}^{\theta+\pi/3} \cos^2 2\theta d\theta$$

$$= \frac{\pi R^2 l}{6} - \frac{\pi l}{6} (r+K)^2 + \frac{lK(r+K)}{2} [\sin 2\theta]_{\theta}^{\theta+\pi/3} - \frac{lK^2}{2} \int_{\theta}^{\theta+\pi/3} \frac{\cos 4\theta + 1}{2} d\theta$$

$$= \frac{\pi l}{6} \{ R^2 - (r+K)^2 \} + \frac{lK(r+K)}{2} \left\{ \sin \left(2\theta + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin 2\theta \right\} - \frac{lK^2}{4} \frac{1}{4} [\sin 4\theta]_{\theta}^{\theta+\pi/3} - \frac{lK^2}{4} [\theta]_{\theta}^{\theta+\pi/3}$$

$$= \frac{\pi l}{12} \{ 2R^2 - 2(r+K)^2 - K^2 \} + \frac{lK(r+K)}{2} \left\{ \sin \left(2\theta + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin 2\theta \right\} - \frac{lK^2}{16} \left\{ \sin \left(4\theta + \frac{4\pi}{3} \right) - \sin 4\theta \right\} \quad (24)$$

$$V_2 \text{ の容積} = [V_0]_{\theta+2\pi/3}^{\theta+2\pi/3} = l \left[\frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2} \int_{\theta+\pi/3}^{\theta+2\pi/3} \{r + K(1 - \cos 2\theta)\}^2 d\theta \right]$$

$$= \frac{\pi l}{12} \{ 2R^2 - 2(r+K)^2 - K^2 \} + \frac{lK(r+K)}{2} \left\{ \sin \left(2\theta + \frac{4\pi}{3} \right) - \sin \left(2\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} - \frac{lK^2}{16} \left\{ \sin \left(4\theta + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin \left(4\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right\} \quad (25)$$

$$V_3 \text{ の容積} = [V_0]_{\theta+\pi/3}^{\theta+\pi/3} = l \left[\frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2} \int_{\theta+2\pi/3}^{\theta+\pi/3} \{r + K(1 - \cos 2\theta)\}^2 d\theta \right]$$

$$= \frac{\pi l}{12} \{2R^2 - 2(r+K)^2 - K^2\} \\ + \frac{lK(r+K)}{2} \left\{ \sin 2\theta - \sin \left(2\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right\} \\ - \frac{lK^2}{16} \left\{ \sin 4\theta - \sin \left(4\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \quad (26)$$

式 (24), (25), (26) の各項の係数は等しく { } 内の正弦関数の対応項の位相差は $2\pi/3$ [rad] であるから,

V_1, V_2, V_3 の容積の和 $= \pi l/4 \cdot \{2R^2 - 2(r+K)^2 - K^2\}$, となる。なぜなら各式の第2項, 第3項, の正弦関数の和は0である。第4室から第6室と, 第1室から第3室は対称であるから, V_4, V_5, V_6 , も式 (21) が適用できる。

作動室 $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ の容積の総和を V とする。

$$V = \pi \{R^2 - (r+K)^2 - K^2/2\} l \quad (27)$$

各室はベーンの中心から中心までとしたのでベーンの作動室内にある容積を V_{bn} , ベーン厚さを w とする。

$$V_{b1} = l(R - \rho_1)w = l\{R - (r+K) - K \cos 2\theta\}w \quad (28)$$

$$V_{b2} = l(R - \rho_2)w = l\{R - (r+K) - K \cos 2(\theta + \pi/3)\}w \quad (29)$$

$$V_{b3} = l(R - \rho_3)w = l\{R - (r+K) - K \cos 2(\theta + 2\pi/3)\}w \quad (30)$$

作動室内に占めるベーンの全容積を V_b とする。 V_{b1}, V_{b2}, V_{b3} , の位相差は $2\pi/3$ [rad] であるから, 式 (28), (29), (30) の余弦項の和は0である。すなわち θ の値に関係なく

$$V_b = 2(V_{b1} + V_{b2} + V_{b3}) = 6l\{R - (r+K)\}w \quad (31)$$

したがってロータが回転してベーンが作動室内に出入しても作動室でベーンの占める容積の総和は θ の項を含まないから一定である。ポンプの全作動容積を V_D , とすると式 (27), (31) から

$$V_D = V - V_b = \left[\pi \left\{ R^2 - (r+K)^2 - \frac{K^2}{2} \right\} - 6\{R - (r+K)\}w \right] \cdot l \quad (32)$$

上式も θ を含まない。図 18 の機構に吸排ポートを適当に設けると, ロータの一回転に対する吐出容積は上式で $R = r + 2K$ とおけばよい。これはポンプ作動するロータの最大半径が $r + 2K$ であり, $\pi \{R - (r + 2K)\}^2 \cdot l$ の部分はポンプ作動に無関係の容積であるからである。

ロータが N [rpm] で回転するときの吐出量 Q は

$$Q = \{2\pi(C + 5/4)K^2 - 6wK\} l \cdot N \quad (33)$$

となり N が一定のとき吐出量が一定で脈動がない。形式は同一でないがベーンが2枚で位相差 $2\pi/3$ [rad] の単位ポンプを同軸に3個並列に同一カムリングに収容したポンプの試作試験⁹⁾で, 25 [kg/cm²] の常用圧力の結果を得ているので, 本形式のポンプでは更に性能がすぐれるものと想定する。

む す び

単弦カム曲線群は平易な数字で容易に解析できるので普及性があり, これらをプロフィールとするワークを創成法で精度高く加工できることは試作試験によって実証した。したがって実用性は十分あると信ずる次第である。

文 献

- 1) 大八木光治：特許第206706号昭27-4815 閉曲線 $p = r + k(1 - \cosh \theta)$ を描く定規
- 2) 大八木光治：特許第226692号昭31-4599 研磨盤
他関連15件省略
米国特許1件 英国特許1件
- 3) 森田鈞, 大八木光治：機械学会42期総会1965-4 No. 131-434
- 4) 大八木光治, 森田鈞：機械学会43期総会1966-4 No. 151-531
- 5) 大八木光治：機械と工具工業調査会 Vol. 8, No. 5, 6, 7, 非円形ワーク創成加工機サインカムゼネレータの性能とポリゴンスタイル加工機の比較
- 6) 大八木光治：特許第204981号昭82-5579 回転ポンプ他3件 米国特許1件
- 7) 大八木光治：機械の研究養賢堂 Vol. 20, No. 1969年 p. 1024
- 8) 大八木治：国士館大学工学部紀要第3号1970年 p. 31 サインカムプロフィールを持つ軸と穴のハメアイとサインカム創成加工機の特性